
# Fonctions valeur absolue et polynôme du second degré

*Vous avez déjà étudiée en classe de Seconde (voir cours de 2nde CH11) les fonctions de référence suivantes : fonction carré $x \mapsto x^2$, fonctions inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$, fonction cube $x \mapsto x^3$ et fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$. Nous allons étudier ici la fonction valeur absolue et les fonctions polynômes du second degré.*

**Objectifs :**

- Savoir exploiter les propriétés de la fonction valeur absolue dans le cadre d'un problème.
- Reconnaître une fonction polynôme du second degré
- Mettre une telle fonction sous forme canonique
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ une équation du second degré
- Étudier le signe d'un polynôme du second degré
- Choisir la forme (développée, factorisée, canonique) la plus pertinente pour résoudre un problème

**Aperçu historique :**

*La représentation graphique d'un polynôme du second degré est une parabole ; c'est la trajectoire décrite par un objet que l'on lance et qui est soumis à la pesanteur. Historiquement, les paraboles ont été étudiées en particulier car elles permettaient d'étudier la trajectoire des boulets de canons (balistique), à partir de la loi de la chute libre énoncée par Galilée (1568-1642) : $z = -\frac{1}{2}gt^2 + z_0$.*
*Les équations du second degré sont au centre de l'algèbre babylonienne, dès avant le XVIIIe siècle av. J.-C. Elles ont été étudiées systématiquement par Al-Khwarizmi au IXe siècle, dans un ouvrage intitulé "Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison" qui, via le mot 'restauration' (en arabe : al-jabr) a donné son nom à l'algèbre. Les formules de résolution que nous allons étudier pour les équations du second degré ont été inventée par François Viète, un mathématicien français du XVIe siècle qui a travaillé à la cour des rois Henri III et Henri IV comme déchiffreur de codes secrets.*

## 1. Fonction valeur absolue

*Il est conseillé de revoir le cours de seconde sur la valeur absolue (cours de 2nde, CH03, paragraphe 2).*

**Définition 3.1** Soit $x$ un nombre réel. La valeur absolue de $x$, notée $|x|$, est la distance entre $x$ et $0$. Ainsi, si $x \leqslant 0$, alors $|x| = -x$, et si $x \geqslant 0$, alors $|x| = x$.

**Exemple 3.1** $|4,2| = 4,2$ ; $|-1,72| = 1,72$ ; $|0| = 0$.

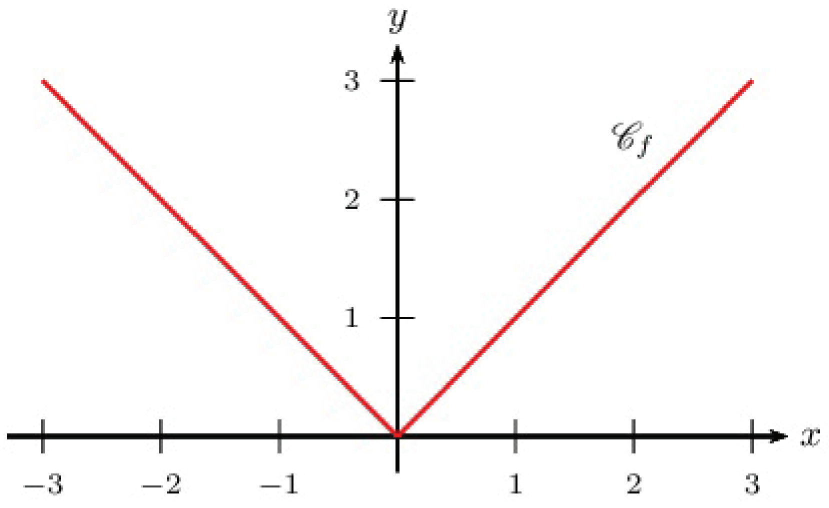
**Propriété 3.1** Soit $r$ un nombre réel positif. $|x| = r \Leftrightarrow x = r$ ou $x = -r$.

**Exemple 3.2** Résoudre l'équation : $|3x+2| = 10$.
**Attention : Qui dit "valeur absolue" dit DEUX CAS !!!**

**Propriété 3.2** Pour tout $x$ réel, on a : $\sqrt{x^2} = |x|$

**Exemple 3.3** En vous plaçant sur des intervalles convenables, écrire, en n'utilisant ni racine carrée, ni de valeur absolue, l'expression : $\sqrt{(x-2)^2}$.

**Définition 3.2** **Fonction valeur absolue**
La ***fonction valeur absolue*** est la fonction $f$ définie, pour tout $x$ réel, par : $f(x) = |x|$.
En particulier, si $x \leqslant 0$, alors $f(x) = -x$, et si $x > 0$, alors $f(x) = x$.
La fonction valeur absolue est représentée par deux demi-droites issues de l'origine.




## 2. Fonction polynôme du second degré

### A. Définition

*Un polynôme à une indéterminée est une expression de la forme $a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + ... + a_nX^n$, où $X$ représente l'indéterminée. On appelle "degré" la plus grande puissance de $X$ présente dans l'expression. Dans l'écriture ci-dessus, le polynôme est de degré $n$.*
*Dans ce chapitre, nous étudierons des polynômes de degré 2 (second degré). On les appelle aussi "**tri**nômes du second degré" car pour le degré 2, le polynôme ne comprend que **trois** termes : il est de la forme*
$a_0 + a_1X + a_2X^2$.

**Définition 3.3** Soient $a, b, c$ trois nombres réels connus tels que $a \neq 0$.
On appelle fonction polynôme du second degré toute fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

**Exemples :** $f : x \longmapsto 5x^2 - 3x + 4$ ; $g : x \longmapsto 3x^2 - 5$ ; $h : x \longmapsto (2x+3)(x-1)$ ; en effet, si l'on développe cette dernière expression, on obtient $2x^2 + x - 3$, qui est bien un polynôme du second degré.

**Remarques :**
- L'expression $ax^2 + bx + c$ est la forme développée de $f(x)$, dont nous étudierons la forme factorisée au paragraphe 3.
- Par abus de langage, on appellera "polynôme du second degré" toute expression algébrique pouvant s'écrire sous la forme $ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

### B. Mise sous forme canonique

**Propriété 3.3** Soient $a, b, c$ trois nombres réels connus tels que $a \neq 0$. L'expression $f(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$, où $\alpha = -\frac{b}{2a}$ , et $\beta = f(\alpha)$.
Cette écriture est unique, c'est la forme canonique.

**Démonstration** Soient $a, b, c$ trois nombres réels tels que $a \neq 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ :
*On met "artificiellement" en facteur le coefficient de $x^2$ :*
$ax^2 + bx + c = a[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}]$

*On transforme, toujours artificiellement, l'écriture des deux premiers termes du crochet pour se rapprocher du "produit remarquable"$A^2+2AB+B^2$, où $A=x$ et $B=\frac{b}{2a}$. La forme factorisée du produit remarquable va nous fournir notre $(x-\alpha)^2$. Il vient :*
$a[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}]$, (on met en facteur le coefficient de $x^2$, ou "coefficient dominant")
$=a[x^2+2\frac{b}{2a}x+(\frac{b}{2a})^2-(\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a}]$, (on fait apparaître artificiellement un produit remarquable)
$=a[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}]$, (on met ce produit remarquable sous forme factorisée)
$=a[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{4a\times c}{4a\times a}]$
$=a[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{4ac}{4a^2}]$
$=a[(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{-b^2+4ac}{4a^2}]$
$=a(x-\underbrace{\frac{-b}{2a}}_{\alpha})^2+\underbrace{\frac{-b^2+4ac}{4a}}_{\beta=f(\alpha)}$, (on a simplifié la dernière fraction par $a$ après avoir distribué /développé le $a$ qui était devant)
$=a(x-\alpha)^2+\beta$,
où $\alpha=-\frac{b}{2a}$, et $\beta=\frac{-b^2+4ac}{4a}=f(\alpha)$.
$\alpha$ et $\beta$ sont entièrement déterminés, la forme canonique existe donc, et est unique.
*Vérification :* $f(\alpha)=f(-\frac{b}{2a})=a(-\frac{b}{2a})^2+b(-\frac{b}{2a})+c=\frac{ab^2}{4a^2}-\frac{b^2}{2a}+c=\frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{2a}+c=\frac{-b^2+4ac}{4a}=\beta$

**Exemple :** Déterminons la forme canonique de
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)=2x^2-6x+5$$
Première méthode : appliquons la formule. On a un polynôme du second degré avec $a=2$, $b=-6$ et $c=5$.
Sa forme canonique est donc : $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$,
avec $\alpha=-\frac{b}{2a}=-\frac{-6}{2\times 2}=\frac{3}{2}$
et $\beta=f(\alpha)=f(\frac{3}{2})=\frac{1}{2}$
Ainsi, la forme canonique est $f(x)=2(x-\frac{3}{2})^2+\frac{1}{2}$
Deuxième méthode : dans l'esprit de la démonstration ci-dessus, mettons le coefficient de $x^2$ en facteur, puis cherchons à exhiber un carré de la forme $a^2+2ab+b^2$ ou $a^2-2ab+b^2$.
$f(x)=2x^2-6x+5=2[x^2-3x+\frac{5}{2}]=2[x^2-2\times\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}]$
On a exhibé le début de "$a^2-2ab+b^2$", reste à en faire apparaître le dernier terme.
$f(x)=2[x^2-2\times\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+\frac{5}{2}]$
$=2[(x-\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}+\frac{5}{2}]=2[(x-\frac{3}{2})^2+\frac{1}{4}]$
$=2(x-\frac{3}{2})^2+\frac{1}{2}$

## C. Sens de variation (rappels)

**Théorème 3.1** Les variations de la fonction polynôme du second degré $f$ de forme canonique $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ dépendent du signe de $a$ et de la valeur de $\alpha$.

Si $a>0$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $\searrow$ | $\beta$ | $\nearrow$ | |

$f$ admet un minimum atteint pour $x=\alpha$

Si $a<0$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | $\beta$ | $\searrow$ | |

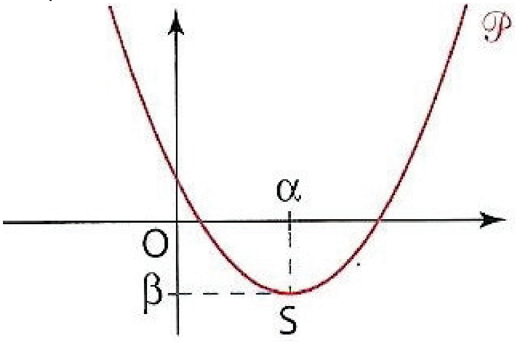
$f$ admet un maximum atteint pour $x=\alpha$

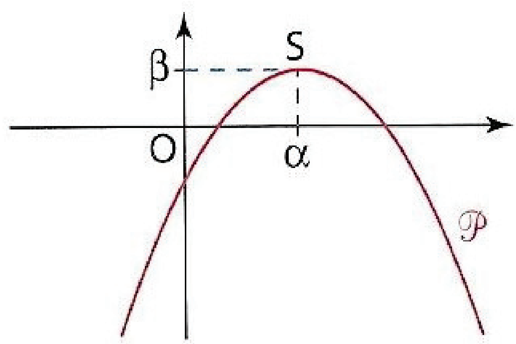
**Exemple :** Soit $f : x\mapsto -3x^2+2x-7$. $f$ est un polynôme du second degré, avec : $a=-3<0$, et $\alpha=-\frac{b}{2a}=-\frac{2}{-6}=\frac{1}{3}$. Or $f(\frac{1}{3})=-\frac{20}{3}$. D'après le théorème ci-dessus, on obtient le tableau de variations :

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | $-\frac{20}{3}$ | $\searrow$ | |

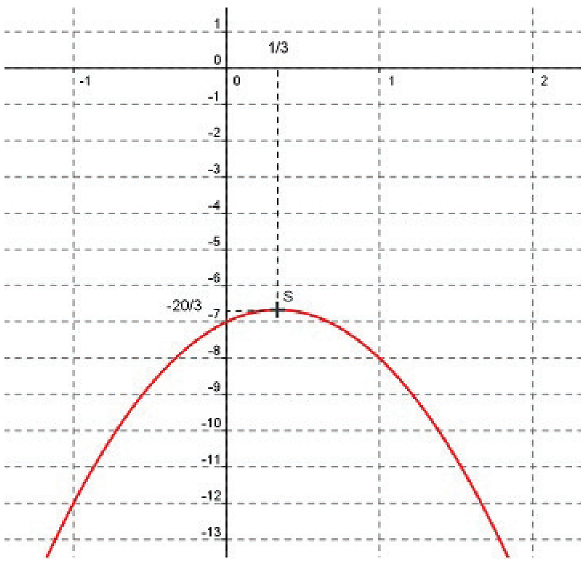
## D. Représentation graphique (rappel)

**Théorème 3.2** (admis) La représentation graphique de la fonction polynôme du second degré $f$ de forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ est une parabole de sommet $S(\alpha;\beta)$, et a pour axe de symétrie la droite d'équation $x = \alpha$.




**Exemple :** Représentation graphique de la fonction $f$ définie dans l'exemple précédent : $f : x \mapsto -3x^2 + 2x - 7$. On a une fonction polynôme du second degré avec $a = -3 < 0$, donc on obtiendra une parabole "tournée vers le bas". Sa forme canonique est $f(x) = -3(x - \frac{1}{3})^2 - \frac{20}{3}$, donc le sommet de la parabole est le point $S(\frac{1}{3}; -\frac{20}{3})$.



## 3. Résolution d'une équation du second degré

### A. Étude du cas général

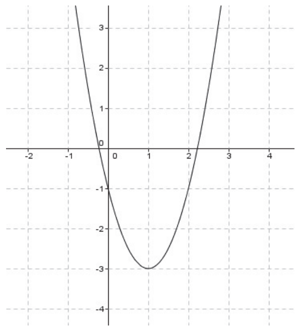
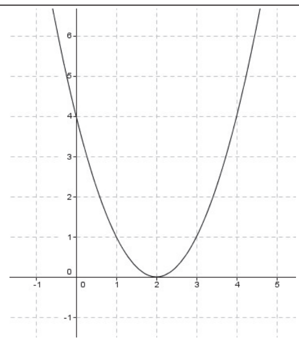
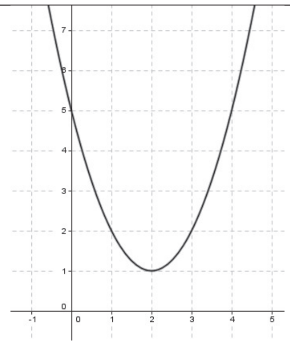
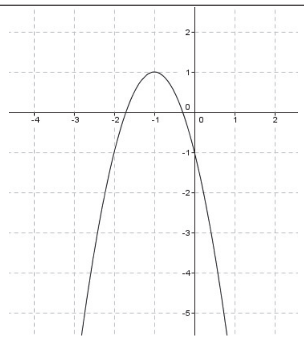
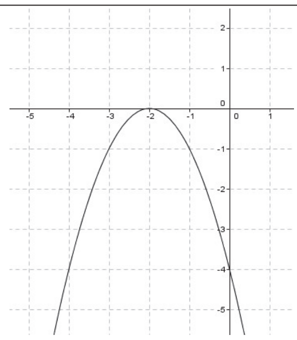
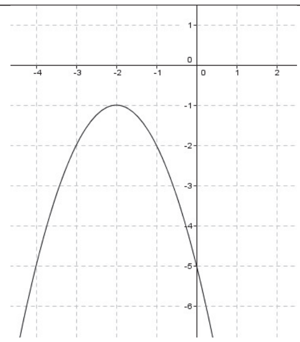
**Démonstration** Soient $a, b, c$ trois nombres réels tels que $a \neq 0$. Résolvons l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.
D'après la démonstration de la propriété 1, cette équation est équivalente à : $a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}] = 0$ (1).
Posons $\Delta = b^2 - 4ac$. Selon le signe de $\Delta$, trois cas de figure peuvent se produire :
**1er cas : si $\Delta > 0$.** Alors $\sqrt{\Delta}$ est bien définie, et l'équation (1) peut s'écrire comme une différence de deux carrés, ce qui va nous permettre d'utiliser la factorisation $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$ et va nous ramener à une équation-produit. Il vient :
$a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}] = 0$
$\Leftrightarrow a[(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a})^2] = 0$
$\Leftrightarrow a[(x + \frac{b}{2a}) + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}] \times [(x + \frac{b}{2a}) - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}] = 0$
$\Leftrightarrow a[x + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}][x + \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}] = 0$
Donc les solutions de cette équation sont $x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
**2ème cas : si $\Delta = 0$.** Alors l'équation (1) devient $a(x + \frac{b}{2a})^2 = 0$, et admet une solution unique : $x = -\frac{b}{2a}$.
*On peut considérer que ces deux premiers cas n'en font qu'un, si l'on étudie $\Delta \geq 0$.*
**3ème cas : si $\Delta < 0$.** Alors $\Delta$ n'admet pas de racine carrée. L'équation (1) devient $(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$, dont le premier membre est positif en tant que carré. Comme $4a^2 > 0$, le deuxième membre est du signe de $\Delta$, c'est-à-dire négatif.
On aboutit à la contradiction : $\underbrace{(x + \frac{b}{2a})^2}_{\text{positif}} = \underbrace{\frac{\Delta}{4a^2}}_{\text{négatif}}$, et l'équation (1) n'admet aucune solution.

**Théorème 3.3** Soient $a, b, c$ trois nombres réels tels que $a \neq 0$.
Posons $\Delta = b^2 - 4ac$, que l'on appellera discriminant de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.
Le nombre de solutions de cette équation dépend du signe de $\Delta$.
- Si $\Delta > 0$ : L'équation admet deux solutions distinctes, $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta = 0$ : L'équation admet une solution unique, $x_0 = -\frac{b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$ : L'équation n'admet aucune solution.

**Vocabulaire :** Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont appelées racines de la fonction $f$. En généralisant les calculs effectués dans le 2ème cas de la démonstration ci-dessus pour $\Delta = 0$, on obtient encore deux solutions : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{0}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{0}}{2a}$. Ces deux solutions sont égales : $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$. On dit que dans ce cas $-\frac{b}{2a}$ est une racine double.

### B. Interprétation graphique

Soient $a, b, c$ trois nombres réels tels que $a \neq 0$. Les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont les abscisses des points d'intersection entre la courbe représentative de la fonction $x \mapsto f(x) = ax^2 + bx + c$ et l'axe des abscisses.

| | $\Delta > 0$ | $\Delta = 0$ | $\Delta < 0$ |
|---|---|---|---|
| $a > 0$ |  |  |  |
| $a < 0$ |  |  |  |

### C. Exemples

**a) Solutions de l'équation $x^2 + 5x + 1 = 0$**

Il s'agit d'une équation du second degré, avec $a = 1$, $b = 5$ et $c = 1$.
On a donc $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 1 = 21$, on est dans le cas $\Delta > 0$.
L'équation admet deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{-5-\sqrt{21}}{2}$ et $x_2 = \frac{-5+\sqrt{21}}{2}$.
$S = \{\frac{-5-\sqrt{21}}{2}; \frac{-5+\sqrt{21}}{2}\}$.

**b) Racines de la fonction $f : x \mapsto 5x^2 + 6x + 2$**

Il s'agit d'une équation du second degré, avec $a = 5$, $b = 6$ et $c = 2$.
On a donc $\Delta = 6^2 - 4 \times 5 \times 2 = -4$, on est dans le cas $\Delta < 0$.
L'équation n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}$, la fonction n'a pas de racines réelles.

**c) Vérification graphique**

On peut contrôler ses résultats graphiquement avec la calculatrice, en tapant $Y1 = ax^2 + bx + c$, puis en utilisant GRAPH pour estimer les abscisses des points où la courbe croise l'axe des ordonnées ; attention, cette méthode ne donne que des résultats approchés.

## 4. Factorisation et application à l'étude du signe

### A. Factorisation

**Propriété 3.4** Soient $a, b, c$ trois nombres réels tels que $a \neq 0$. Le polynôme du second degré $ax^2+bx+c$ se factorise éventuellement comme suit :

- Si $\Delta > 0$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, où $x_1$ et $x_2$ sont les racines du trinôme.
- Si $\Delta = 0$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$, où $x_0$ est la racine double du trinôme.
- Si $\Delta < 0$, il n'y a pas de forme factorisée dans $\mathbb{R}$.

**Démonstration** Cette propriété découle des formes factorisées que nous avons exhibées lors de la démonstration du théorème 3.

**Exemple :**
Factorisons le trinôme $3x^2 - 5x + 2$. On a $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 1$, donc $\Delta > 0$ et le polynôme a deux racines réelles distinctes, $x_1 = \frac{2}{3}$ et $x_2 = 1$.
On obtient donc la forme factorisée : $3x^2 - 5x + 2 = 3(x - \frac{2}{3})(x - 1)$.
*L'utilité principale d'une forme factorisée est d'étudier le signe de $f(x)$ en fonction de $x$.*

## B. Étude du signe

**Étude du cas général :**

**Démonstration** Soient $a, b, c$ trois nombres réels tels que $a \neq 0$. Considérons le polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$. Sa forme factorisée dépend du signe du discriminant $\Delta$, donc l'étude de son signe en dépend aussi (se référer aux interprétations graphiques du paragraphe 2.B.).

Si $\Delta > 0$ : Avec les notations précédentes, on a $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, où $x_1$ et $x_2$ sont les racines distinctes du trinôme. On peut supposer, quitte à intervertir les rôles de $x_1$ et $x_2$, que $x_1 < x_2$. On est donc ramenés à l'étude du signe du produit $a(x - x_1)(x - x_2)$, qui découle de l'étude du signe de chacun de ses facteurs. On obtient le tableau de signes suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $(x - x_1)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| Signe de $(x - x_2)$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| Signe de $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ | | Signe de $a$ | 0 | Signe de $-a$ | 0 | Signe de $a$ | |

Si $\Delta = 0$ : Avec les notations précédentes, on a $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$, où $x_0$ est la racine double du trinôme. Comme un carré est toujours positif ou nul, $ax^2 + bx + c$ est du signe de $a$, mais s'annule pour $x = x_0$ (sans changer de signe).

Si $\Delta < 0$ : Avec les notations précédentes, on a : $ax^2 + bx + c = a\underbrace{[\underbrace{(x + \frac{b}{2a})^2}_{\text{positif}} - \underbrace{\frac{\Delta}{4a^2}}_{\text{négatif}}]}_{\text{positif}}$.

Donc dans ce dernier cas le trinôme est du signe de $a$ sur $\mathbb{R}$.

**Théorème 3.4** Soit $ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré. Le signe de ce polynôme dépend du signe de $\Delta$ et du signe de $a$.
- Si $\Delta > 0$, le polynôme est du signe de $a$ "à l'extérieur des racines", et du signe de $-a$ "à l'intérieur des racines".
- Si $\Delta = 0$, le polynôme est toujours du signe de $a$. Il s'annule sans changer de signe en son unique racine.
- Si $\Delta < 0$, le polynôme est toujours du signe de $a$.

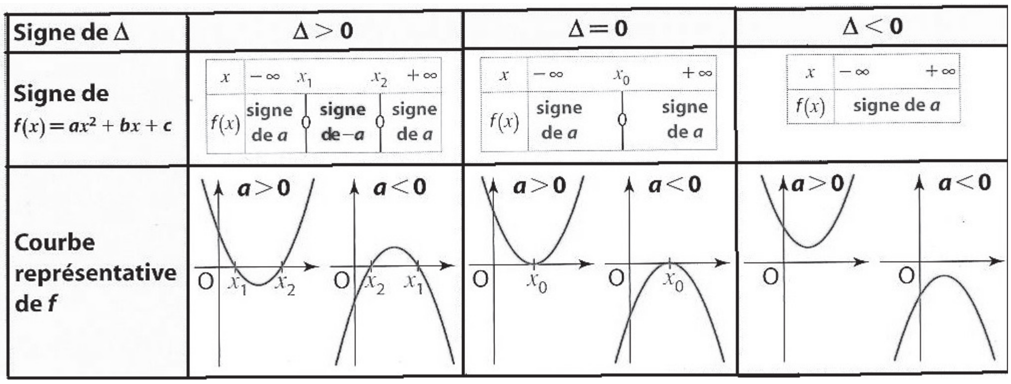
**Exemples :**
a) Étude du signe du polynôme $-x^2 + 4x - 1$
C'est un polynôme du second degré, avec $a = -1$, $b = 4$, et $c = -1$. D'où $\Delta = 12 > 0$ ; ce polynôme admet deux racines réelles distinctes, $x_1 = 2 - \sqrt{3}$ et $x_2 = 2 + \sqrt{3}$. D'après ce qui précède, le polynôme est du signe de $a = -1$ "à l'extérieur des racines", d'où le tableau de signes :

| $x$ | $-\infty$ | | $2-\sqrt{3}$ | | $2+\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $-x^2+4x-1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

b) Résolution de l'inéquation $3x^2-2x+1 \geq 0$
Le premier membre de cette inégalité est un polynôme du second degré, avec $a=3$, $b=-2$, et $c=1$. D'où $\Delta=-8<0$ ; ce polynôme n'admet aucune racine réelle, et il est donc toujours du signe de $a=3$, c'est-à-dire positif.
Ainsi, l'inéquation proposée est toujours vraie, et l'on a $S=\mathbb{R}$.

**Interprétation graphique :**

On peut contrôler ses résultats graphiquement avec la calculatrice, en tapant $Y1=ax^2+bx+c$, puis en utilisant GRAPH pour estimer les abscisses des points où la courbe représentative de la fonction est au-dessus (ou en-dessous) l'axe des ordonnées. Attention, cette méthode ne donne que des résultats approchés.



| Signe de $\Delta$ | $\Delta>0$ | $\Delta=0$ | $\Delta<0$ |
|---|---|---|---|
| Signe de $f(x)=ax^2+bx+c$ | $x$ : $-\infty$, $x_1$, $x_2$, $+\infty$ ; $f(x)$ : signe de $a$, 0, signe de $-a$, 0, signe de $a$ | $x$ : $-\infty$, $x_0$, $+\infty$ ; $f(x)$ : signe de $a$, 0, signe de $a$ | $x$ : $-\infty$, $+\infty$ ; $f(x)$ : signe de $a$ |
| Courbe représentative de $f$ | $a>0$ ; $a<0$ | $a>0$ ; $a<0$ | $a>0$ ; $a<0$ |

## 5. Avec la calculatrice

Voici le programme permettant à votre calculatrice de vous donner le discriminant et les éventuelles racines d'un polynôme du second degré s'écrivant sous la forme $Ax^2+Bx+C$ :

**Programme pour une casio** :
"CALCUL DISCRIMINANT :"
"$AX^2+BX+C$"
"A" ?→A
"B" ?→B
"C" ?→C
"DELTA=" :$B^2-4\times A\times C\rightarrow D$
D=0⇒Goto 1
D¡0⇒Goto 2
D¿0⇒Goto 3
Lbl 1
"UNE SOLUTION"
$-B/(2\times A)$
Stop
Lbl 2
"AUCUNE SOLUTION"
Stop
Lbl 3
"2 SOLUTIONS"
"X1=" :$(-B-\sqrt{}D)/(2\times A)$
"X2=" :$(-B+\sqrt{}D)/(2\times A)$
Stop

**Programme pour une TI** :
PROGRAM :DEGRE2
Disp "CALCUL DISCRIMINANT :"
Disp "$AX^2+BX+C$"
Prompt $A$,$B$,$C$
ClrHome
$B^2-4\times A\times C\rightarrow D$
Disp "DISCRIMINANT",$D$
If abs($D$)=0
Then
Disp "1 SOLUTION",$-B/(2\times A)$
Else
If $D>0$
Then
Disp "2 SOLUTIONS"
Disp $(-B-\sqrt{}(D))/(2\times A)$
Disp $(-B+\sqrt{}(D))/(2\times A)$
Else
Disp "AUCUNE SOLUTION"
End
End

N.B. : Sur une T.I. en français, la commande "ClrHome" s'appelle "EffEcr".

**Pour s'entraîner :** *on peut utiliser la fiche méthode, les exercices corrigés et les tests en ligne de*

`http://xm1math.net/premiere_s/index.html`

## 6. Fiche de synthèse sur le second degré

Trinôme du second degré : $f(x) = ax^2 + bx + c$.

### A. Forme canonique

$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$, avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha) = -\left(\frac{b^2-4ac}{4a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$

### B. Racines

$\Delta < 0$ : pas de racines
$\Delta = 0$ : une seule racine, dite "racine double", $x_0 = -\frac{b}{2a}$
$\Delta < 0$ : deux racines distinctes, $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

### C. Factorisation

$\Delta < 0$ : pas de factorisation dans $\mathbb{R}$
$\Delta = 0$ : factorisation $f(x) = a(x-x_0)^2$
$\Delta < 0$ : factorisation $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$

### D. Sens de variation

$a > 0$, courbe en "cuvette", comme celle de la fonction carré. Variations $\searrow\nearrow$
$a < 0$, courbe en "colline", variations $\nearrow\searrow$

### E. Extremum (maximum ou minimum)

L'extremum vaut $y = \beta = -\frac{\Delta}{4a}$, et est atteint pour $x = \alpha = -\frac{b}{2a}$

### F. Étude du signe

$\Delta < 0$ : toujours du signe de $a$
$\Delta = 0$ : du signe de $a$, et s'annule pour $x = x_0$ (racine double)
$\Delta < 0$ : du signe de $a$ "à l'extérieur des racines"

### G. Utilisation des différentes formes

| Forme | forme développée<br>$ax^2 + bx + c$ | forme canonique<br>$a(x-\alpha)^2 + \beta$ | forme factorisée<br>$a(x-x_1)(x-x_2)$ |
|---|---|---|---|
| Exemples d'utilisations | Calculer $f(0) = c$ | Trouver l'extremum<br>Calculer $f(\alpha) = \beta$ | Étudier le signe<br>Calculer $f(x_1) = 0$ et $f(x_2) = 0$ |